VEKTORSKI AUTOREGRESIONI MODELI I KOINTEGRACIONA ANALIZA

Zorica Mladenović

Teme

1. Prisustvo jediničnog korena u VAR modelu
2. Kointegracija i VAR model
3. MA reprezentacija kointegrisanog VAR modela
4. Johansenova procedura
5. Primer

Polazni pojmovi

- Jedinični koren
- Integrisanost vremenske serije
- Kointegracija
- Model sa korekcijom ravnotežne greške

Teme

1. Prisustvo jediničnog korena u VAR modelu
2. Kointegracija i VAR model
3. MA reprezentacija kointegrisanog VAR modela
4. Johansenova procedura
5. Primer

Uslov stabilnosti
VAR(p) $\longrightarrow$ VAR(1)

Zapisujemo model u formi odstupanja od srednje vrednosti

$$Y_t - \mu = \Phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \Phi_2(Y_{t-2} - \mu) + \ldots + \Phi_p(Y_{t-p} - \mu) + a_t$$

Grupišemo članove kao:

$$\eta_t = \begin{bmatrix} Y_t - \mu \\ Y_{t-1} - \mu \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} - \mu \end{bmatrix}_{np\times 1} \qquad F = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \ldots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ I_n & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I_n \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \ldots & I_n & 0 \end{bmatrix}_{np\times np} \qquad u_t = \begin{bmatrix} a_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{np\times 1}$$

$$\eta_t = F\eta_{t-1} + u_t, E\left(u_t u_\tau'\right) = \begin{cases} H, t = \tau \\ 0, \text{ostalo} \end{cases}, \qquad H = \begin{bmatrix} \Omega & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{np\times np}$$

STABILAN PROCES:
SVE KARAKTERISTIČNE VREDNOSTI
MATRICE F SU MANJE OD JEDAN PO MODULU

Šta ako uslov stabilnosti nije ispunjen?

- Ako postoji bar jedna karakteristična vrednost date matrice koja je po modulu jednaka jedan, dok su ostale po modulu strogo manje od jedan, tada vektorska vremenska serija poseduje jedinični koren i nije stacionarna.
- Ako postoji bar jedna karakteristična vrednost date matrice koja je strogo veća od jedan po modulu, dok su ostale vrednosti strogo manje od jedan po modulu, tada je vektorska vremenska serija eksplozivna.

Šta ako uslov stabilnosti nije ispunjen? II

- Ukoliko postoji jedinični koren u sistemu VAR modela, tada je potrebno napraviti distinkciju između sledeće dve situacije:
  - Vremenske serije nisu kointegrisane
  - Vremenske serije jesu kointegrisane.
- Ako vremenske serije sa jediničnim korenom nisu kointegrisane, onda se njihova analiza ostvaruje na osnovu VAR modela prvih diferenci.
- Postojanje kointegracije omogućava da se vremenske serije sa jediničnim korenom razmatraju u okviru VAR modela, a da se prethodno ne transformišu primenom operatora diferenciranja.
- Kointegrisane vremenske serije poseduju adekvatnu reprezentaciju u formi polaznog VAR modela. To omogućava njegovu upotrebu i kada serije individualno nisu stacionarne.

Teme

1. Prisustvo jediničnog korena u VAR modelu
2. <u>Kointegracija i VAR model</u>
3. MA reprezentacija kointegrisanog VAR modela
4. Johansenova procedura
5. Primer

Kointegracija i VAR model

- Pretpostavimo da svaka od vremenskih serija x_t i y_t poseduje jedan jedinični koren. Takođe, pretpostavimo da se može koristiti sledeći VAR(2) model:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}}_{Y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{11}^{(1)} & \phi_{12}^{(1)} \\ \phi_{21}^{(1)} & \phi_{22}^{(1)} \end{bmatrix}}_{\Phi_1} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix}}_{Y_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{11}^{(2)} & \phi_{12}^{(2)} \\ \phi_{21}^{(2)} & \phi_{22}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\Phi_2} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{t-2} \\ y_{t-2} \end{bmatrix}}_{Y_{t-2}} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

Ako od obe strane jednakosti oduzmemo $\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix}$ i koristimo vezu:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_{t-1} \\ \Delta y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{t-2} \\ y_{t-2} \end{bmatrix}$$

dolazimo do vektorske forme modela sa korekcijom ravnotezne greske

Kointegracija i VAR model II

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \end{bmatrix}}_{\Delta Y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{11}^{(1)} + \phi_{11}^{(2)} - 1 & \phi_{12}^{(1)} + \phi_{12}^{(2)} \\ \phi_{21}^{(1)} + \phi_{21}^{(2)} & \phi_{22}^{(1)} + \phi_{22}^{(2)} - 1 \end{bmatrix}}_{\Pi} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix}}_{Y_{t-1}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{11}^{(2)} & \phi_{12}^{(2)} \\ \phi_{21}^{(2)} & \phi_{22}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\Gamma_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_{t-1} \\ \Delta y_{t-1} \end{bmatrix}}_{\Delta Y_{t-1}} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

$$\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + a_t$$

$$\Pi = \Phi_1 + \Phi_2 - I_2, \Gamma_1 = -\Phi_2.$$

- Polazna pretpostavka: komponente vektora su nestacionarne u smislu posedovanja jediničnog korena.
- Na levoj strani gornje jednakosti nalazi se stacionarna reprezentacija ovih vremenskih serija (**njihova prva diferenca**), dok na desnoj strani jednakosti postoji njihova nestacionarna forma (**nivo sa docnjom prvog reda**), kao i stacionarna sa docnjom prvog reda (**prva diferenca sa docnjom**).
- Kako je moguće da relacija ima logičkog smisla, a da slučajna greška i dalje bude vektorski beli šum? Postoje dva rešenja.

Kointegracija i VAR model III

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\Delta x_t\\ \Delta y_t\end{bmatrix}}_{\Delta Y_t}=\underbrace{\begin{bmatrix}\phi_{11}^{(1)}+\phi_{11}^{(2)}-1 & \phi_{12}^{(1)}+\phi_{12}^{(2)}\\ \phi_{21}^{(1)}+\phi_{21}^{(2)} & \phi_{22}^{(1)}+\phi_{22}^{(2)}-1\end{bmatrix}}_{\Pi}\underbrace{\begin{bmatrix}x_{t-1}\\ y_{t-1}\end{bmatrix}}_{Y_{t-1}}-\underbrace{\begin{bmatrix}\phi_{11}^{(2)} & \phi_{12}^{(2)}\\ \phi_{21}^{(2)} & \phi_{22}^{(2)}\end{bmatrix}}_{\Gamma_1}\underbrace{\begin{bmatrix}\Delta x_{t-1}\\ \Delta y_{t-1}\end{bmatrix}}_{\Delta Y_{t-1}}+\begin{bmatrix}a_{1t}\\ a_{2t}\end{bmatrix}$$

$$\Delta Y_t=\Pi Y_{t-1}+\Gamma_1\Delta Y_{t-1}+a_t$$

$$\Pi=\Phi_1+\Phi_2-I,\ \Gamma_1=-\Phi_2.$$

1. Rang matrice Π je nula. U tom slučaju model se svodi na VAR reda 1 prvih diferenci.
2. Rang matrice Π veći je od nule i manji od dva (tačno jedan). Tada se matrica može predstaviti na sledeći način:

$$\Pi=\alpha\beta',\ \text{gde su } \alpha \text{ i } \beta \text{ vektori parametara } 2\times 1,\ \text{tako da je}$$

$$\text{linearna kombinacija } \beta' Y_t=\beta'[x_t\ \ y_t]' \text{ stacionarna.}$$

To znači da su komponente vektora x_t i y_t kointegrisane.

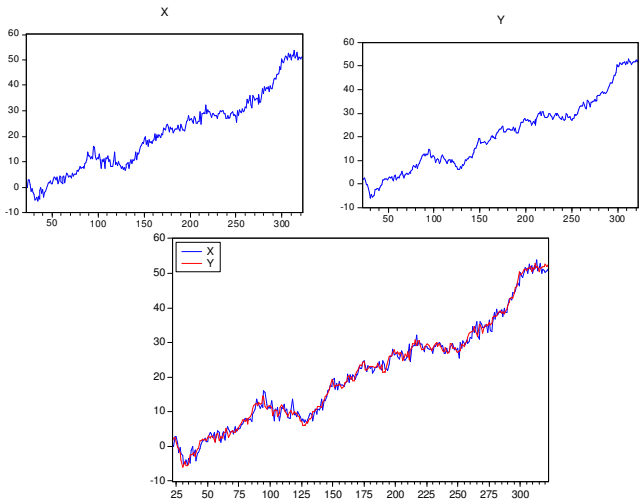
Vektor β sadrži kointegracione parametre,
Vektor α obuhvata parametre prilagođavanja.

Kointegracija i VAR model IV

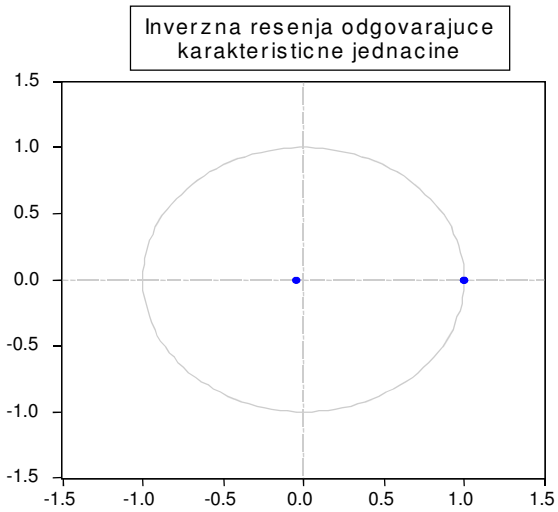
- Za dovoljno veliki obim uzorka stacionarne i nestacionarne vremenske serije nisu korelisane. Da bi gornja relacija bila validna u smislu postojanja korelacije između ΔY_t i Y_{t-1} , neophodno je da se neutrališe nestacionarnost u vektoru Y_{t-1} na desnoj strani jednakosti. To se ostvaruje kointegracijom komponenti unutar datog vektora.
- Zaključak: postoji ekvivalentnost između specifikacije pretpostavljene VAR modelom i forme modela sa korekcijom ravnotežne greške kada su vremenske serije kointegrisane. To omogućava primenu VAR modela za nivoe vremenskih serija sa jediničnim korenom.

Nestabilan VAR i kointegrisane vremenske serije

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + a_t, \begin{bmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Determinan ta je nula.} \\ \text{Rang je jedan.}}} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + a_t$$

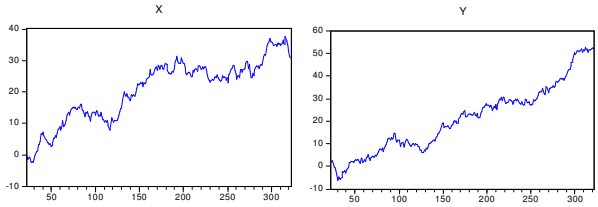


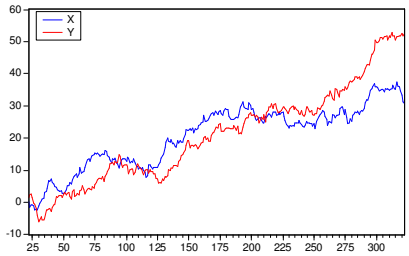
Nestabilan VAR i kointegrisane vremenske serije II



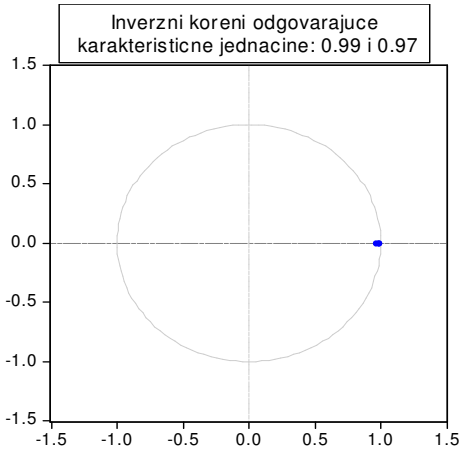
Nestabilan VAR i nekointegrisane vremenske serije

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + a_t, \begin{bmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Determinan ta je nula.} \\ \text{Rang je nula.}}} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + a_t$$





Nestabilan VAR i nekointegrisane vremenske serije II



Kointegracija i VAR model: uopštenje

VAR reda p dimenzije n :

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \Phi_p Y_{t-p} + a_t$$

Ako su resenja jednacine :

$$\left| I_n - \Phi_1 x - \Phi_2 x^2 - \ldots - \Phi_p x^p \right| = 0$$

tacno jedan, tada su promenljive integrisane reda 1.

Moguce je da postoji kointegracija.
U tom slucaju VAR model nije potpuno adekvatna forma zato
sto se kointegraciona relacija ne iskazuje eksplicitno.

Problem se resava primenom nove specifikacije :
vektorska forma modela sa korekcijom ravnotezne greske (engl. VECM) :

$$\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \ldots + \Gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + a_t$$

$$\Pi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_p - I_n$$

$$\Gamma_j = -\sum_{i=j+1}^{p} \Phi_i,\ j = 1, \ldots, p-1.$$

Kointegracija i VAR model: uopštenje II

Ako VAR(p) model sadrzi jedinicne korene, onda

$$\left| I_n - \Phi_1 x - \Phi_2 x^2 - \ldots - \Phi_p x^p \right| = 0$$

postaje

$$\left| I_n - \Phi_1 - \Phi_2 - \ldots - \Phi_p \right| = 0 \Rightarrow |\Pi| = 0$$

$\Rightarrow \Pi$ je singularna matrica.

U ovom slucaju rang matrice Π je redukovan : $\text{rang}(\Pi) = r < n.$

- <u>Rang matrice Π je nula</u>. U ovom slučaju: $\Pi=0$. Promenljive u VAR modelu nisu kointegrisane, a VECM se svodi na VAR (p-1) prvih diferenci:

$$\Delta Y_t = \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \ldots + \Gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + a_t$$

- <u>Rang matrice Π veći je od nule i manji od *n* (tačno *r*)</u>. U tom slučaju postoji *r* linearno nezavisnih kointegracionih relacija i *n-r* zajedničkih stohastičkih trendova. Tada se matrica Π može predstaviti na sledeći način $\Pi = \alpha\beta'$, α i β dimenzije $n \times r$

VECM je:

$$\Delta Y_t = \alpha\beta' Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \ldots + \Gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + a_t$$

$$\beta' Y_{t-1} \sim I(0).$$

Kointegracija i VAR model: uopštenje III

- Ako je matrica β, *nxr,* data sa:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1r} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nr} \end{bmatrix}$$

tada postoji r stacionarnih linearnih kombinacija $\beta' Y_t$:

$$\begin{aligned} &\text{Komponente vektora}: Y_t = [y_{1t}\ y_{2t} \dots y_{nt}]' \\ &\text{I relacija}: \quad \beta_{11} y_{1t} + \quad \beta_{21} y_{2t} \quad + \dots + \beta_{n1} y_{nt} \\ &\text{II relacija}: \quad \beta_{12} y_{1t} + \quad \beta_{22} y_{2t} \quad + \dots + \beta_{n2} y_{nt} \\ &\qquad \dots \qquad\qquad \dots \qquad\qquad \dots \\ &\text{r – ta relacija}: \quad \beta_{1r} y_{1t} + \quad \beta_{2r} y_{2t} \quad + \dots + \beta_{nr} y_{nt} \end{aligned}$$

- Dekompozicija

$\Pi = \alpha\beta'$ nije jedinstvena.

Za svaku nesingularnu matricu H $(r \times r)$ vazi:

$$\alpha\beta' = \alpha H H^{-1} \beta' = \underbrace{(\alpha H)}_{\alpha^*} \underbrace{(H^{-1}\beta')}_{\beta^{*'}} = \alpha^* \beta^{*'}$$

Isti primer još jednom

Polazni model:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi_1} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

Karakteristicne vrednosti matrice Φ_1 su 0 i 1.

Model transformacijom postaje:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Pi} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

Rang matrice Π je 1. Moze se predstaviti na sledeci nacin:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Pi} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\alpha} \underbrace{[1 \text{ - } 1]}_{\beta'}$$

Kako je rang matrice Π manji od 2 a veci od 0, ove vremenske serije su kointegrisane.

Isti primer još jednom II

Linearna kombinacija $\beta' Y_t$ svodi se na $x_t - y_t \sim I(0)$.

Model sa korekcijom ravnotezne greske je:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\alpha} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\beta'} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

- Vremenska serija x_t prilagođava se putanji dugoročne ravnotežne veze sa koeficijentom prilagođavanja -1.
- Vremenska serija y_t se u svom kretanju ne koriguje na osnovu informacije o kointegrisanosti, budući da je u jednačini za Δy_t koeficijent prilagođavanja 0.
- To znači da promenljiva y_t predstavlja izvor nestacionarnosti u sistemu ovog VAR modela.

Teme

1. Prisustvo jediničnog korena u VAR modelu
2. Kointegracija u VAR modelu
3. <u>MA reprezentacija kointegrisanog VAR modela</u>
4. Johansenova procedura
5. Primer

Vektorska MA reprezentacija nestabilnog sistema
Reprezentacija zajedničkih stohastičkih trendova

Posmatramo nestabilni VAR(2) model:

$$\Phi(L)Y_t = \left(I - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2\right)Y_t = c + a_t$$

Resenja jednacine $\left|I_n - \Phi_1 x - \Phi_2 x^2\right| = 0$

su jednaka jedinici, tako da je $|\Phi(1)| = 0$ i matrica $\Phi(L)$ ne moze da se invertuje za $x = 1$.

Na primer, za VAR dimenzije 2 imamo cetiri resenja jednacine:

$$|\Phi(x)| = (1 - g_1 x_1)(1 - g_2 x_2)(1 - g_3 x_3)(1 - g_4 x_4) = 0,\ x_j = 1/g_j,\ j = 1,\dots,4.$$

Ako je bar jedno resenje jedan, determinanta je nula.

$$\Phi(L)Y_t = c + a_t \Rightarrow Y_t = \underbrace{\Phi(L)}_{\Phi^a(L)/|\Phi(L)|}{}^{-1}(c + a_t)$$

$$\left.\begin{aligned} (1-L)Y_t &= \underbrace{\Phi(L)^{-1}(1-L)}_{C(L)}(c + a_t) \\ C(L) &= \underbrace{C(1)}_{C} + C^*(L)(1-L) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (1-L)Y_t = \left(C + C^*(L)(1-L)\right)(c + a_t)$$

$$C(L) = C_0 + C_1 L + C_2 L^2 + \dots$$

Reprezentacija zajedničkih trendova II

Za proizvoljno s jednacina je:

$$Y_s = Y_{s-1} + Ca_s + Cc + \underbrace{C^*(L)(a_s - a_{s-1})}_{\text{stacionarni deo:}}$$

Sabiranje za $s = 1,2,\dots,t$ daje:

$$\sum_{s=1}^{t} Y_s = \sum_{s=1}^{t} Y_{s-1} + C\sum_{s=1}^{t} a_s + Cct + \sum_{s=1}^{t} \underbrace{C^*(L)(a_s - a_{s-1})}_{\text{stacionarni deo:}}$$

$$Y_t = C\sum_{s=1}^{t} a_s + Cct + C^*(L)a_t + Y_0 - C^*(L)a_0.$$

Vektorska vremenska serija sa jedinicnim korenima je zbir:

- stohastickog trenda, $C\sum_{s=1}^{t} a_s$
- deterministickog trenda, Cct
- inicijalne vrednosti, $Y_0 - C^*(L)a_0$
- stacionarne komponente, $C^*(L)a_t$.

Reprezentacija zajedničkih trendova i kointegrisani sistem

Nestabilan VAR model $\Rightarrow$ Reprezentacija zajednickih trendova

$\Downarrow$

VECM forma $\Rightarrow$ Kako izgleda model zajednickih trendova?

Kointegrisani sistem izveden iz VAR(1) modela : $\Delta Y_t = c + \alpha\beta' Y_{t-1} + a_t$

Uvodimo matrice $\alpha_\perp$ i $\beta_\perp$, $n \times (n-r)$:

- $\alpha'\alpha_\perp = 0, \beta'\beta_\perp = 0$
- $\text{rang}(\alpha, \alpha_\perp) = n, \text{rang}(\beta, \beta_\perp) = n$
- $\beta_\perp \left(\alpha_\perp' \beta_\perp\right)^{-1} \alpha_\perp' + \alpha\left(\beta'\alpha\right)^{-1} \beta' = I_n \rightarrow$ S. Johansen : 'divna relacija'

$$Y_t = \underbrace{\beta_\perp \left(\alpha_\perp' \beta_\perp\right)^{-1}}_{\omega_1} \alpha_\perp' Y_t + \underbrace{\alpha\left(\beta'\alpha\right)^{-1}}_{\omega_2} \beta' Y_t \quad (1)$$

$$Y_t = \omega_1 \alpha_\perp' Y_t + \omega_2 \beta' Y_t$$

Reprezentacija zajedničkih trendova i kointegrisani sistem II

$$\Delta Y_t = c + \alpha\beta' Y_{t-1} + a_t \,/\cdot \beta' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta' Y_t = \left(I_r + \beta'\alpha\right)\beta' Y_{t-1} + \beta' c + \beta' a_t \rightarrow \text{VAR(1) model}$$

za $\beta' Y_t$. Rec je o stacionarnim komponentama,

te su karakteristicne vrednosti $\left(I_r + \beta'\alpha\right)$ manje od 1:

$$\rightarrow \beta' Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \left(I_r + \beta'\alpha\right)^i \beta'\left(a_{t-i} + c\right) \quad (2)$$

$$\Delta Y_t = c + \alpha\beta' Y_{t-1} + a_t \,/\cdot \alpha_\perp' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_\perp' \Delta Y_t = \alpha_\perp' c + \alpha_\perp' a_t$$

$$\rightarrow \alpha_\perp' Y_t = \alpha_\perp' Y_0 + \sum_{i=1}^{t} \alpha_\perp'\left(a_i + c\right) \quad (3)$$

$$Y_t = \beta_\perp \left(\alpha_\perp' \beta_\perp\right)^{-1} \underbrace{\alpha_\perp' Y_t}_{(3)} + \alpha\left(\beta'\alpha\right)^{-1} \underbrace{\beta' Y_t}_{(2)} \quad (1)$$

Reprezentacija zajedničkih trendova i kointegrisani sistem III

(2)i (3)u (1):

$$Y_t = \beta_\perp \left(\alpha'_\perp \beta_\perp\right)^{-1} \left[\alpha'_\perp Y_0 + \sum_{i=1}^{t} \alpha'_\perp (a_i + c)\right] + \alpha\left(\beta'\alpha\right)^{-1} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(I_r + \beta'\alpha\right)^i \beta'(a_{t-i} + c)\right]$$

$$= C\sum_{i=1}^{t} a_i + Cct + CY_0 + \underbrace{\alpha\left(\beta'\alpha\right)^{-1} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(I_r + \beta'\alpha\right)^i \beta'(a_{t-i} + c)\right]}_{\text{stacionarno}} \rightarrow \text{VMA}$$

$$C = \beta_\perp \left(\alpha'_\perp \beta_\perp\right)^{-1} \alpha'_\perp$$

Zaključak:

1. Pošli smo od kointegrisanog modela izvedenog iz nestabilnog VAR(1) modela i došli do reprezentacije zajedničkih trendova.
2. Matrica koja opisuje uticaj stohastičkih trendova može da se dovede u vezu sa parametrima kointegracionih odnosa.

Reprezentacija zajedničkih trendova i kointegrisani sistem IV

I za kointegrisani model koji se izvodi iz nestabilnog VAR(p) sistema postoji reprezentacija zajedničkih trendova.

Matrica uz kumulisane slucajne greske (stohasticke trendove):

$$C = \beta_\perp \left(\alpha'_\perp \Gamma \beta_\perp\right)^{-1} \alpha'_\perp$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_{p-1} - I_n$$

$$C = \underbrace{\beta_\perp \left(\alpha'_\perp \Gamma \beta_\perp\right)^{-1}}_{\tilde{\beta}_\perp} \alpha'_\perp \Rightarrow C = \tilde{\beta}_\perp \alpha'_\perp$$

$\alpha'_\perp$ – opisuje stohasticke trendove kao kombinaciju neanticipiranih slucajnih sokova u pojedinim promenljivima

$\tilde{\beta}_\perp$ – opisuje uticaj stohastickih trendova na svaku promenljivu

Reprezentacija zajedničkih trendova i kointegrisani sistem: uopštenje

Johansen (1995), *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*, Oxford University Press

Granger - Johansenova teorema reprezentacije (opisna interpretacija)

Neka VAR(p) dimenzije n za Y_t poseduje jedinicne korene, ali tako da je:

1. ΔY_t stacionaran vektorski proces,
2. $\beta' Y_t$ kointegrisano, r relacija i

(Oba procesa u 1. i 2. poseduju odgovarajucu stacionarnu formu)

3. Matrica $\left(\alpha_\perp' \Gamma \beta_\perp\right)^{-1}$ postoji, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_{p-1} - I_n$.

Tada:

1. Postoji adekvatna VECM forma za Y_t (Engle and Granger, 1987)
2. Postoji adekvatna VMA forma za Y_t (Johansen, 1991, 1995).

Reprezentacija zajedničkih trendova i kointegrisani sistem: primer

$$\Delta x_t = \alpha_1 (x_{t-1} - y_{t-1}) + a_{1t}$$
$$\Delta y_t = \alpha_2 (x_{t-1} - y_{t-1}) + a_{2t}$$
$$z_{t-1} = (x_{t-1} - y_{t-1})$$
$$\Delta(x_t - y_t) = \Delta z_t = (\alpha_1 - \alpha_2) z_{t-1} + a_{1t} - a_{2t}$$
$$z_t = (\alpha_1 - \alpha_2 + 1) z_{t-1} + a_{1t} - a_{2t}$$

$|(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)|$ manje od 1: uslov stacionarnosti za z_t

$$z_t = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_1 - \alpha_2 + 1)^i (a_{1t-i} - a_{2t-i}) \rightarrow \text{stacionarno}$$

Ako je jedna relacija stacionarna, onda postoji jos jedna koja nije stacionarna:

$$\alpha_2 \Delta x_t - \alpha_1 \Delta y_t = \alpha_2 a_{1t} - \alpha_1 a_{2t}$$
$$\alpha_2 x_t - \alpha_1 y_t = \alpha_2 x_{t-1} - \alpha_1 y_{t-1} + (\alpha_2 a_{1t} - \alpha_1 a_{2t})$$
$$\alpha_2 x_t - \alpha_1 y_t = \alpha_2 x_0 - \alpha_1 y_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{t} (\alpha_2 a_{1i} - \alpha_1 a_{2i})}_{S_t} \rightarrow \text{nestacionarno}, \; x_0 = y_0 = 0$$
$$x_t = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}(S_t - \alpha_1 z_t), \; y_t = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}(S_t - \alpha_2 z_t)$$

Svaka od vremenskih serija je funkcija stohastickog trenda.

Reprezentacija zajedničkih trendova i kointegrisani sistem: primer II

Zakljucak:

1. $x_t - y_t$ je stacionarna relacija
2. $\alpha_2 x_t - \alpha_1 y_t$ je nestacionarna relacija
3. x_t, y_t – integrisano reda 1
4. Kointegracioni vektor $\beta' = (1, -1)$
5. Zajednicki stohasticki trend $\sum_{i=1}^{t}(\alpha_2 a_{1i} - \alpha_1 a_{2i}) = \underbrace{(\alpha_2 \quad -\alpha_1)}_{\alpha_\perp'} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{t} a_{1i} \\ \sum_{i=1}^{t} a_{2i} \end{pmatrix}$
6. Ponder uticaja stohastickog trenda u svakoj jednacini

$\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}$ odnosno $\beta_\perp \left(\alpha_\perp' \beta_\perp\right)^{-1}$ – proveriti.

Reprezentacija zajedničkih trendova i kointegrisani sistem: primer III

Uloga α_1 i α_2

1.

$\Delta x_t = -0.3(x_{t-1} - y_{t-1}) + a_{1t}$

$\Delta y_t = 0.3(x_{t-1} - y_{t-1}) + a_{2t}$

$\alpha_1 - \alpha_2 + 1 = 0.4$ manje od $1 \Rightarrow$

Serije su nestacionarne ali kointegrisane

2.

$\Delta x_t = 0.25(x_{t-1} - y_{t-1}) + a_{1t}$

$\Delta y_t = -0.25(x_{t-1} - y_{t-1}) + a_{2t}$

$\alpha_1 - \alpha_2 + 1 = 1.5$ vece od $1 \Rightarrow$

Serije su eksplozivne i nisu kointegrisane

Reprezentacija zajedničkih trendova i kointegrisani sistem: primer IV

Uloga svih parametara modela (Johansen,1995)

$\Delta x_t = 0.25(x_{t-1} - y_{t-1}) + 2.25\Delta y_{t-1} + a_{1t}$

$\Delta y_t = -0.25(x_{t-1} - y_{t-1}) + a_{2t}$

$\alpha_1 - \alpha_2 + 1 = 1.5$ vece od 1.

Ali,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.25 \end{bmatrix}, \alpha_\perp = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_\perp = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \Gamma_1 - I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2.25 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\alpha'_\perp \Gamma \beta_\perp = 0.25 \neq 0.$

Proveriti da VAR model ne poseduje eksplozivne korene.

Iako koeficijenti prilagodjavanja imaju pogresan znak, sistem je kointegrisan. Usaglasavanje promenljivih se postize zahvaljujuci uticaju Δy_{t-1}.

Poruka : bitni su svi parametri VECM.